METODO GLOBAL PARA DETERMINACION ASTRONOMICA DE COORDENADAS GEOGRAFICAS EN EL SISTEMA C.I.O.

GLOBAL METHOD FOR ASTRONOMICAL DETERMINATION OF GEOGRAPHIC COORDINATES IN THE C.I.O. SYSTEM

R.A. CARESTIA

O.A.F.A.

RESUMEN: Se propone un método para la determinación directa en el sistema C.I.O. (Conventional International Origin) de la LATITUD y LONGITUD GEOGRAFICA de un topocentro. Deben medirse simultáneamente el tiempo (U.T.C) y la distancia cenital, tomadas en un corto lapso, a tres astros cualesquiera de coordenadas ecuatoriales aparentes conocidas. No requiere la confección de un programa especial de observación y los métodos de Gauss, Zinger y Pewsow pueden derivarse como un caso particular del método acá considerado.

ABSTRACT: A method for direct determination in the Conventional International Origin System (C.I.O.) of GEOGRAPHIC LONGITUD AND LATITUDE from a topocentric place is discussed. Simultaneous measurements of time (U.T.C.) and zenith distance of three non-specified celestial bodies (with well-known equatorial apparent coordinates) must be taken, within a short lapse. It does not demand a special observation program and the Gauss, Zinger and Pewsow methods may be derived as particular cases from the method here considered.

1. INTRODUCCION

La rotación de la Tierra se representa por una revolución diaria alrededor de un eje, cuyo propio movimiento respecto a un **marco inercial de referencia** (estrellas lejanas u objetos extragalácticos) es el representado por las teorías de la precesión y la nutación. Dicho eje de rotación permite definir los polos celestes, el ecuador celeste y el equinoccio verdadero para una fecha determinada; éstos definen a su vez el SISTEMA CELESTE INSTANTANEO DE REFERENCIA.

El cuerpo físico de la Tierra gira diariamente definiendo el eje de rotación, pero tiene a su vez una lenta oscilación lateral, que no modifica la posición del eje de rotación **respecto del marco inercial de referencia,** pero sí modifica la posición del polo terrestre (intersección del eje de rotación con la superficie terrestre), el cual aparece dibujando sobre la superficie una trayectoria cuasi-circular alrededor de su punto medio, en periodos de 365 a 428 días y una amplitud máxima de 0".3 (equivalentes a 9 m). Este movimiento del polo terrestre respecto de un marco de referencia terrestre es conocido como "movimiento del polo".

Para definir sin ambiguedad la posición del polo instantáneo (*) respecto de un marco terrestre de referencia se adopta, por convención internacional, un punto "fijo al cuerpo físico de la Tierra", llamado polo C.I.O. (Conventional International Origin). Su posición queda indirectamente marcada por su abalizamiento a un conjunto de estaciones de observación con posiciones relativas conocidas y desde donde es posible determinar la posición del polo instantáneo de rotación en base a observaciones de estrellas, radio-fuentes y satélites terrestres apropiados.

El polo C.I.O. define implícitamente el ecuador C.I.O. y el meridiano C.I.O. de Greenwich como meridiano "cero", con lo cual queda definido perfectamente el SISTEMA TERRESTRE DE REFERENCIA.

La posición del sistema terrestre de referencia respecto al sistema celeste instantáneo se define en base a tres rotaciones:

Rotaciones 1 y 2 : Los pequeños ángulos x_p, y_p.
Estos ángulos corresponden a las coordenadas del polo instantáneo con respecto al polo C.I.O., medidos en segundos de arco a lo largo de los meridianos de 0° y 270° de longitud este respectivamente. Los valores de x_p e y_p son publicados en boletines bimensuales, para las 0h (U.T.C.) de cada día, por el International Earth-Rotation Service (I.E.R.S.), a partir del 1 de enero de 1988.

Rotacion 3 : El tiempo sidereo aparente de Greenwich (GAST).
Se obtiene por medio del tiempo universal coordinado (U.T.C.), dado por las emisoras autorizadas de señales horarias y la diferencia UT1-UTC, publicadas por el I.E.R.S.

$$GAST = \{ UTC + (UT1 - UTC)\} * 1.0027379 + GAST$$

(a 0h UT1).

El movimiento del polo causa variaciones en la distancia cenital y el acimut del polo celeste y, por lo tanto, varían también las latitudes (ϕ_a) y longitudes (λ_a) terrestres determinadas astronómicamente. En primera aproximación, la diferencia con los valores ϕ_m y λ_m respecto del polo C.I.O. está dada por:

$$\phi_m - \phi_a = y_p \operatorname{sen} \lambda_a - x_p \cos \lambda_a$$

$$\lambda_m - \lambda_a = -(y_p \cos \lambda_a + x_p \operatorname{sen} \lambda_a) \tan \phi_a$$

La transformación rigurosa de las componentes de un vector $\vec{p}_c$, en el sistema celeste instantáneo, a sus componentes $\vec{p}_t$, en el sistema terrestre C.I.O., se hace mediante tres rotaciones, que indicadas matricialmente son:

$$\vec{p}_t = R_2(-x_p).R_1(-y_p).R_3(GAST).\vec{P}_c \qquad (1)$$

y recíprocamente

(*)

Por tratarse de posición instantánea, el polo celeste y el polo terrestre están ambos sobre el mismo eje de rotación de la fecha.

$$\vec{p_c} = R_3(-GAST).R_1(y_p).R_2(x_p).\vec{P_t} \qquad (2)$$

donde $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$ y $R_3(\alpha)$ son las matrices correspondientes a una rotación α alrededor del primero (x), segundo (y) y tercero (z) ejes respectivamente, de un sistema cartesiano y están definidas por las siguientes expresiones:

$$R_1(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad ; \quad R_2(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$R_3(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En la Figura 1 se representan por X, Y, Z los ejes del sistema celeste instantáneo y por U, V, W, los del sistema terrestre C.I.O. Ambos sistemas son rectangulares, geocéntricos, de sentido directo, y en ellos se ha adoptado la siguiente convención internacional:

Sistema celeste instantáneo:

X -> dirigido al punto vernal verdadero
Z -> dirigido al polo norte celeste instantáneo
XY -> plano del ecuador instantáneo
Y -> dirigido a ascensión recta 6h

Sistema terrestre C.I.O.:

U -> intersección del meridiano medio de Greenwich o meridiano origen C.I.O. con el ecuador C.I.O.
W -> dirigido al polo norte C.I.O.
UV -> plano del ecuador C.I.O.
V -> dirigido a longitud 90° al este de Greenwich

La transformación de las componentes de un vector $\vec{P}$, entre ambos sistemas, se realiza, según lo dicho anteriormente, mediante los productos matriciales indicados en las fórmulas (1) y (2) y que se desarrollan seguidamente:

$$\begin{vmatrix} U \\ V \\ W \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x_p & 0 & \operatorname{sen} x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} x_p & 0 & \cos x_p \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & -\operatorname{sen} y_p \\ 0 & \operatorname{sen} y_p & \cos y_p \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

y recíprocamente

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos y_p & \operatorname{sen} y_p \\ 0 & -\operatorname{sen} y_p & \cos y_p \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \cos x_p & 0 & -\operatorname{sen} x_p \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x_p & 0 & \cos x_p \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} U \\ V \\ W \end{vmatrix}$$

donde por brevedad se ha puesto GAST = θ.

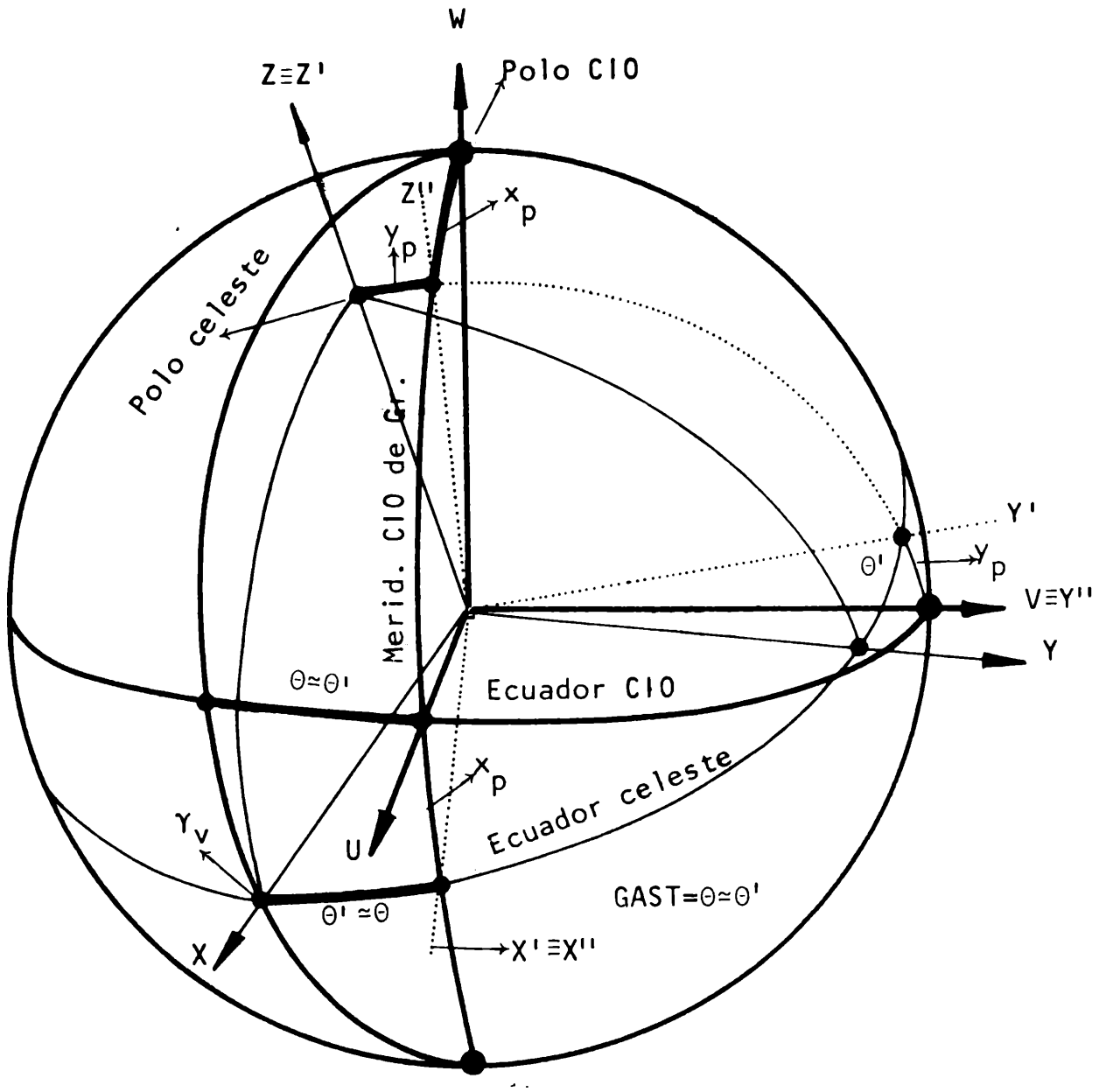


Figura 1

2. METODO PROPUESTO

En el **sistema celeste instantáneo** la dirección a un astro S, tal como se lo observa desde un topocentro T, puede ser representada por un vector unitario $\vec{S}$, trazado desde el origen del sistema (geocentro), paralelamente a la dirección observada desde el topocentro. (Fig. 2).

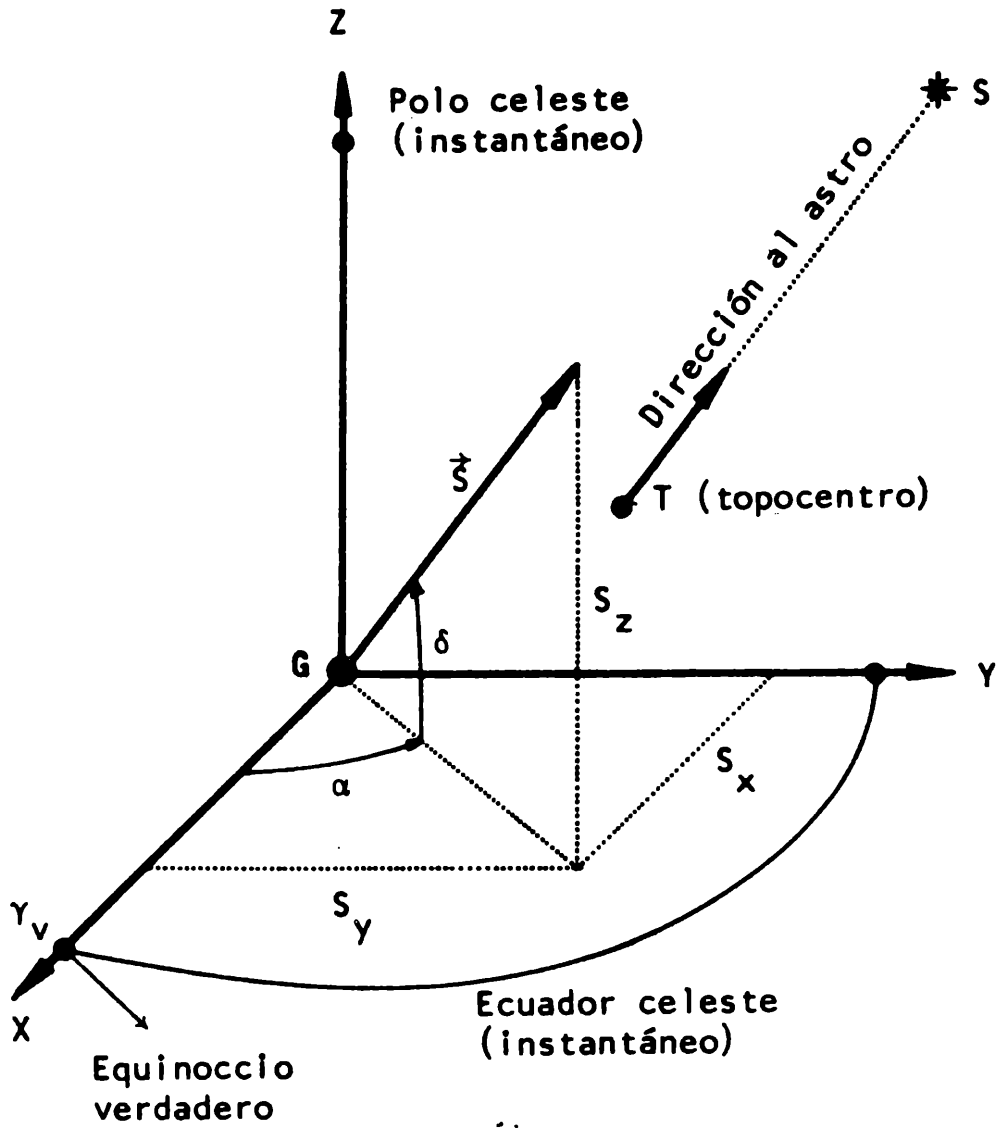


Figura 2

Las componentes del vector $\vec{S}$ serán:

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\delta . \cos\alpha \\ \cos\delta . \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\delta \end{vmatrix} \qquad (1)$$

donde α = ascensión recta
δ = declinación -> coordenadas aparentes topocéntricas

A su vez, en el **sistema terrestre C.I.O.**, la dirección de la vertical en un topocentro T puede ser representada como un vector unitario $\vec{\tau}$, trazado desde el orígen del sistema (geocentro) en forma paralela a la dirección de la vertical en el topocentro. (Fig. 3)

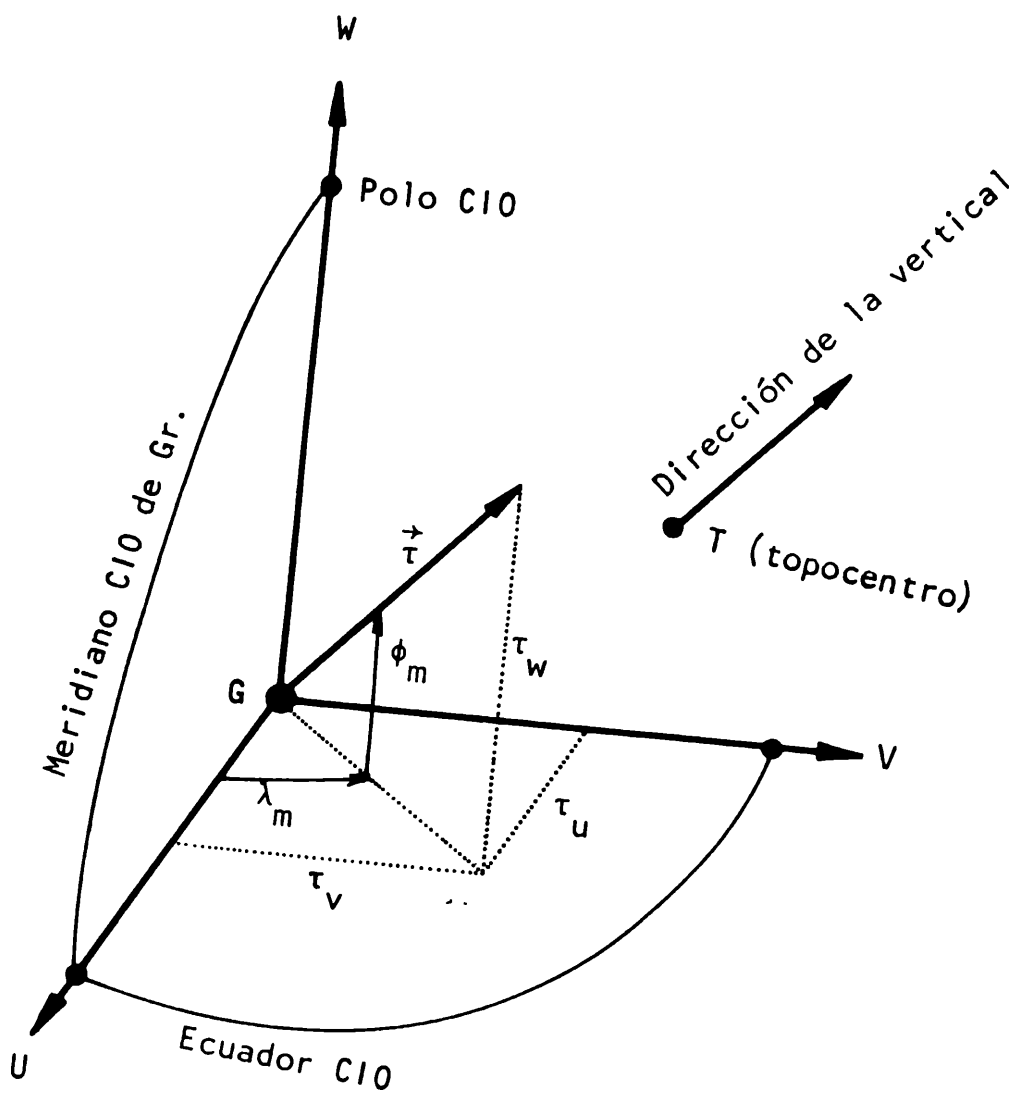


Figura 3

Las componentes del vector $\vec{\tau}$ serán:

$$\vec{\tau} = \begin{vmatrix} \tau u \\ \tau v \\ \tau w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi m . \cos \lambda m \\ \cos\phi m . \operatorname{sen} \lambda m \\ \operatorname{sen}\phi m \end{vmatrix} \qquad (2)$$

donde ϕ_m = latitud
λ_m = longitud
} → coordenadas geográficas astrónomicas medias respecto al polo C.I.O.

Las componentes del vector $\vec{S}$ (dirección al astro) también pueden ser dadas en el sistema terrestre (C.I.O.), y como ambos sistemas tienen el geocentro como origen común, las mismas pueden obtenerse a partir de las componentes S_x, S_y, S_z mediante las tres rotaciones indicadas en (1):

$$\vec{S} = \begin{vmatrix} S_u \\ S_v \\ S_w \end{vmatrix} = R_2(-x_p).R_1(-y_p).R_3(GAST). \begin{vmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{vmatrix} \qquad (3)$$

Tenemos así los vectores $\vec{T}$ (vector posicion del topocentro) y $\vec{S}$ (vector posición del astro), ambos unitarios, en el sistema terrestre (C.I.O.), cuyas componentes son:

$$\vec{T} = (T_u, T_v, T_w) \quad y \quad \vec{S} = (S_u, S_v, S_w),$$

según se muestra en la Fig. 4.

El ángulo entre los dos vectores unitarios $\vec{T}$ y $\vec{S}$ es ζ, la distancia cenital del astro medida desde el topocentro T y corregida por errores instrumentales y refracción astronómica.

Por otra parte, el producto escalar de ambos vectores unitarios es:

$$\vec{S}.\vec{T} = |\vec{S}| \,.\, |\vec{T}| \,.\, \cos\zeta = \cos\zeta \quad \text{por ser } |\vec{S}| = 1 \quad y \quad |\vec{T}| = 1$$

El mismo producto escalar en función de las componentes es:

$$\vec{S}.\vec{T} = S_u \,.\, T_u + S_v \,.\, T_v + S_w \,.\, T_w = \cos\zeta \qquad (4)$$

Llamando

$$T_u = \cos\phi_m \,.\, \cos\lambda_m = X \qquad S_u = a \qquad \cos\zeta = L$$
$$T_v = \cos\phi_m \,.\, \operatorname{sen}\lambda_m = Y \qquad S_v = b$$
$$T_w = \operatorname{sen}\phi_m = Z \qquad S_w = c$$

la ecuación (4) toma la forma:

$$a.Z + b.Y + c.X = L, \qquad (5)$$

en la que las incógnitas X, Y, Z están relacionadas por las expresiones siguientes:

$$\tan\lambda_m = \frac{Y}{X} \;;\quad \operatorname{sen}\phi_m = Z \;;\quad \tan\phi_m = Z/\sqrt{(X^2+Y^2)}$$

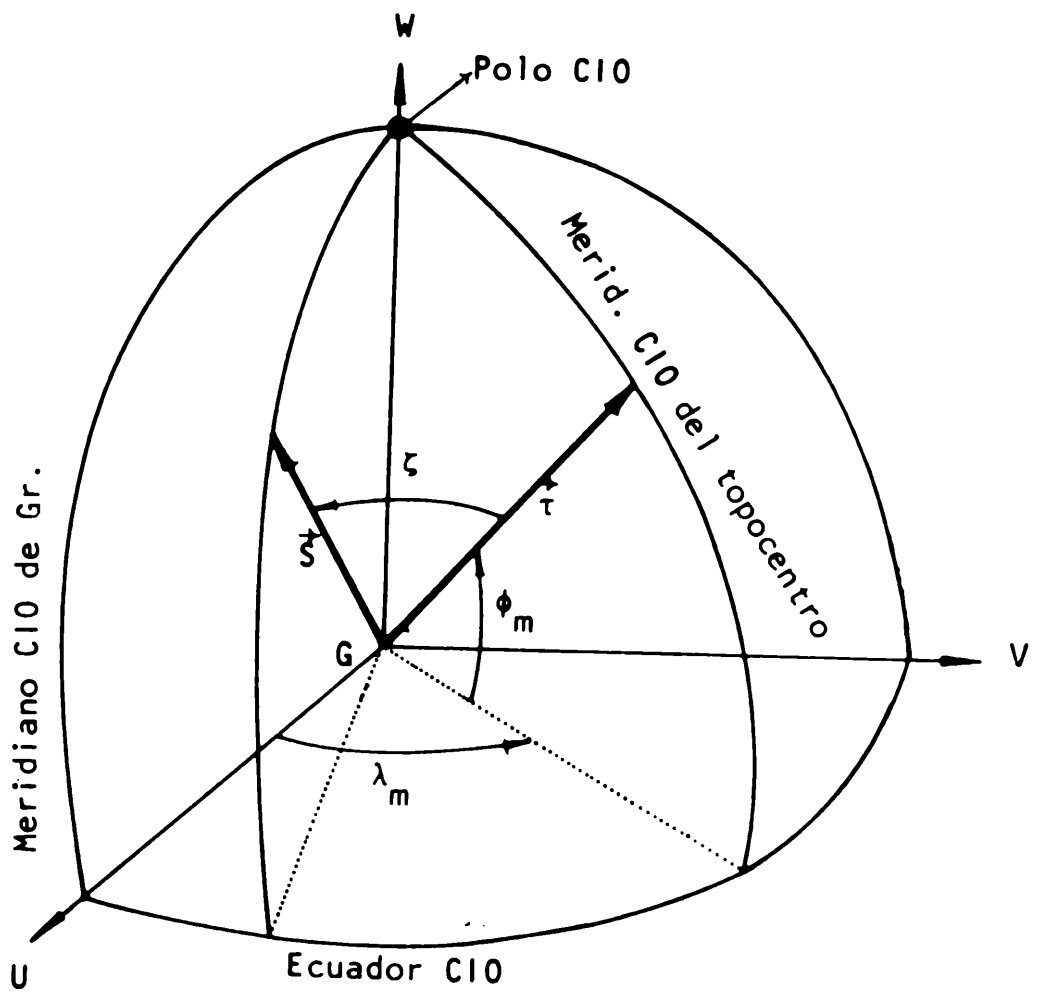
Por lo tanto, la observación de tres astros desde el mismo topocentro nos permitiría plantear un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas tal como el siguiente:

$$\begin{aligned} a_1.X + b_1.Y + c_1.Z &= L_1, \\ a_2.X + b_2.Y + c_2.Z &= L_2, \\ a_3.X + b_3.Y + c_3.Z &= L_3, \end{aligned} \qquad (6)$$

el que una vez resuelto nos permitiría conocer X, Y, Z y a partir de éstas calcular λ_m y ϕ_m según las expresiones:

$$\lambda_m = \arctan (Y/X) \quad ; \quad \phi_m = \arctan (Z/\sqrt{(X^2+Y^2)}) \qquad (7)$$

Tendremos así, para el topocentro considerado, las coordenadas geográficas astronómicas respecto del sistema internacional C.I.O.



La ecuación (5) es la de un plano cuyo vector normal tiene como componentes a sus coeficientes a, b, c; ellas son a su vez las componentes del vector posición del astro (S). Es decir, el vector normal y el vector posición del astro son la misma cosa. Resolver el sistema (6) es encontrar el punto intersección de tres planos. La intersección mas "franca" se tendrá cuando los tres planos sean aproximadamente ortogonales entre sí, o cuando

la dirección a los tres astros (vectores $\vec{S}$) sean aproximadamente ortogonales entre sí. Es conveniente tener ésto en cuenta, entre otras cosas, cuando se elijan los astros a observar.

Finalmente, resulta conveniente notar que:

(1) Debido a inevitables errores de medición, las componentes X, Y, Z obtenidas al resolver el sistema (6) definen un vector sólo **aproximadamente unitario**, por lo cual no debe usarse ϕm = arcsin Z, a menos de "normalizar" dicho vector.

(2) Si se extiende la observación a más de tres astros, el sistema (5) tendrá más ecuaciones que incógnitas y seguramente admitirá una solución por "mínimos cuadrados".

(3) Si los tres astros son tomados a la misma distancia cenital, estaremos en el clásico "Método de Gauss", pero ahora calculado en el sistema CIO. Idéntica consideración vale para los métodos de Zinger y Pewsow.

El autor agradece al Prof. Claudio Carlos Mallamaci su importante colaboración, oportunas críticas y sugerencias técnicas aportadas al presente trabajo.

REFERENCIAS:

Aguilar, Félix : "Lecciones de geodesia: 1ra parte, Cap. II, pág. 61; 2da parte, Cap. XV, pág. 143 a 160, Editado por el Centro de Estudiantes de Ingeniería La Plata 1937-1952.

Anton, Howard 1978. "Introducción al álgebra lineal". Cap. 1, pág. 13 ; Cap. 2, pág. 69; Cap. 3, pág. 101, 114, 130. Editorial LIMUSA - México.

Bomford, G. : "Geodesy". Tema 4-06, pág. 292. Tema 4-07, pág. 295. Tema 4-22, pág. 315. Apéndice B

I. Mueller 1969. "Spherical an practical astronomy" (as applied to geodesy) apartados 4-13 pág. 80; 5-1 pág 139; 11-1 pág. 476; 11-41 pag. 519. Frederik Ungar Publishing Co. New York

The Astronomical Almanac: años 1987 y 1988, pag. B4, B60, K10 (Washington -London).

Woolard-Clemence 1966. "Spherical astronomy" Cap. 9, pág. 194 a 203 Academic Press, New York and London.